EXERCICE N°1 — 7 points

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$

On considère les points $A(1,1,1)$, $B(0,4,0)$, $C(0,0,2)$ et $I(-1,1,-1)$.

1°) a) Déterminer les composantes du vecteur $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}$.

b) Calculer le volume $\mathcal{V}$ du tétraèdre *ABCI*.

2°) On désigne par $\mathcal{P}$ le plan (ABC).

Montrer qu'une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ est : $x+y+2z-4=0$.

3°) Soit (S) l'ensemble des points $M(x,y,z)$ de l'espace tel que :

$$x^2+y^2+z^2+2x-2y+2z-8=0.$$

a) Montrer que (S) est la sphère de centre I et de rayon $\sqrt{11}$.

b) Montrer que $P\cap(S)$ est un cercle $\mathscr{C}$ de rayon $\sqrt{5}$.

c) Vérifier que le segment $[BC]$ est un diamètre du cercle $\mathscr{C}$.

4°) Soit *a* un réel et *M* le point défini par : $\overrightarrow{AM}=a\overrightarrow{AB}$.

a) Déterminer à l'aide du réel *a*, les coordonnées du point *M*.

b) Montrer que $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{CM}=(a-1)(11a+3)$.

c) En déduire que la droite (AB) recoupe le cercle $\mathscr{C}$ au point *E* défini par $\overrightarrow{AE}=\frac{-3}{11}\overrightarrow{AB}$.

d) Montrer que le volume $\mathcal{V}'$ du tétraèdre *AECI* est égal à $\frac{3}{11}\mathcal{V}$.

EXERCICE N°2 — 7 points

Soit f la fonction définie sur IR par : $x\mapsto\frac{1}{1+x^2}$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité 4 cm).

1°) Etudier les variations de f et tracer C_f.

2°) En utilisant la méthode des rectangles et en subdivisant l'intervalle $[0,1]$ en quatre intervalles de même amplitude, donner un encadrement de $I=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx$.

Tous droits réservés © TakiAcademy.com

3°) Soit G la fonction définie par $G(x)=\int_0^x \frac{1}{1+t^2}dt$.

Montrer que G est dérivable sur IR et calculer $G'(x)$.

4°) Soit H la fonction définie sur $\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$ par $H(x)=G(\tan x)$.

a) Montrer que $H'(x)=1$, en déduire $H(x)$ pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right[$.

b) Montrer alors que $I=\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt=\frac{\pi}{4}$ puis calculer $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{1+t^2}dt$.

EXERCICE N°2 — 5 points

1°) Soit g la fonction définie sur $IR\setminus\{-1\}$ par : $g(x)=\frac{x^3+3x^2+3x+5}{(x+1)^2}$.

a) Déterminer trois réels a, b et c tels que : $g(x)=ax+b+\frac{c}{(x+1)^2}$.

b) En déduire la primitive F_0 de g sur l'intervalle $]-1,+\infty[$ et qui s'annule en 1.

2°) a) À l'aide d'une intégration par parties calculer la valeur moyenne $\overline{f}$ de $f: x\mapsto x\cos 2x$ sur l'intervalle $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$.

b) Soit $\mathscr{C}$ la courbe de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité 1cm)

Vérifier que pour tout $x\in\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$, $f(x)\geq 0$ puis calculer l'aire de la région limitée par $\mathscr{C}$ et les droites d'équations $y=0$, $x=0$ et $x=\frac{\pi}{4}$.

Tous droits réservés © TakiAcademy.com